



# Generation de maillages par une methode de type frontal

Paul-Louis George, E. Seveno

## ► To cite this version:

Paul-Louis George, E. Seveno. Generation de maillages par une methode de type frontal. [Rapport de recherche] RR-1725, INRIA. 1992. inria-00076964

**HAL Id: inria-00076964**

**<https://inria.hal.science/inria-00076964>**

Submitted on 29 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNITÉ DE RECHERCHE  
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
B.P.105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél.: (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

1 9 9 2



ème

anniversaire

N° 1725

*Programme 6*  
*Calcul Scientifique, Modélisation et*  
*Logiciels numériques*

## GÉNÉRATION DE MAILLAGES PAR UNE MÉTHODE DE TYPE FRONTAL

Paul-Louis GEORGE  
Eric SÉVENO

Juin 1992



★ R R - 1 7 2 5 ★

Rapport - Génération de maillages

# Génération de maillages par une méthode de type frontal

Paul Louis George, Eric Séveno

1 Juillet 1992

# Génération de maillages par une méthode de type frontal

Paul Louis George, Eric Séveno

INRIA Domaine de Voluceau- Rocquencourt BP 105 -78153 LE CHESNAY FRANCE

## Résumé

*Ce rapport se propose de faire le point sur les différentes phases nécessaires à la mise en œuvre d'un mailleur automatique de type frontal. Il rappelle cette méthode (au moins, pour une des manières de la présenter) et décrit une version capable de mailler un domaine quelconque à partir de la description de sa frontière. Le cas bidimensionnel isotrope est entièrement décrit et des extensions possibles sont indiquées.*

## Advancing-front type mesh generation

## Abstract

*This report aims to outline the different phases necessary to implement an advancing-front type automatic mesh generator. It, firstly, summarizes this method (for one of the ways possible of presenting it), and describes one variant to mesh an arbitrary domain from its boundary description. The two-dimensional isotropic case is described in full and possible extensions are indicated.*

## 1 Introduction

On se propose de décrire ici un mailleur automatique 2D basé sur une méthode frontale. L'intérêt de cette étude réside moins dans la description de la méthode frontale elle-même, désormais bien connue, que dans la manière de traiter les différents problèmes qu'elle soulève. On veillera notamment à éliminer au maximum la part d'arbitraire dans les choix à faire, afin d'obtenir les meilleures vitesse et qualité de maillage quel que soit le domaine considéré. Il sera intéressant à ce sujet de comparer la méthode à une méthode de Delaunay-Voronoi. Un autre point important sera d'examiner d'une part, la capacité de la méthode décrite à construire des maillages anisotropes et adaptatifs et, d'autre part, sa possibilité d'extension au cas tridimensionnel.

Le problème que l'on veut résoudre est le suivant (on se place délibérément en dimension 2): *Trouver un maillage acceptable d'un domaine quelconque à partir de la donnée de son contour connu sous la forme d'un ensemble de segments (le domaine peut avoir des points internes spécifiés à l'avance et sa frontière peut comporter plusieurs composantes connexes).*

Le maillage créé l'est dans le cadre d'une application de la méthode des Eléments Finis. Pour un calcul de ce type, il est important de débiter avec un bon maillage de départ sachant que cette requête de qualité ne peut être basée que sur des considérations géométriques puisque les seules informations supposées connues sont de nature géométrique.

Un tel calcul pourra indiquer si le maillage est adapté ou s'il doit l'être par quelque méthode que ce soit (ce n'est pas l'objectif de ce travail).

La section 2 présente succinctement les principes de toute méthode frontale. Les sections suivantes décrivent la méthode que nous proposons. On donne tout d'abord dans la section 3 les quelques outils informatiques et géométriques qui servent par la suite. Les sections 4 et 5 définissent respectivement les notions d'espace de contrôle et d'espace de voisinage. La création d'un élément du maillage est ensuite détaillée dans la section 6, et le schéma général de la méthode est repris en section 7. Sont alors donnés en section 8 quelques exemples de maillages par cette méthode ainsi que des points de comparaison avec une méthode de Delaunay-Voronoi. On présentera enfin dans la section 9 quelques généralisations possibles de la méthode présentée.

## 2 Rappels sur les méthodes frontales

### 2.1 Introduction

Adapté aux géométries a priori quelconques, ce type de mailleur a été étudié par [A. George-1971], [Carnet-1978], [Löhner, Parikh-1988b], [Peraire et al. 1988] et [Golgolab-1989]. Il va permettre de construire un recouvrement du domaine à partir de son contour. Les éléments générés sont des triangles (en dimension 2). On utilise comme donnée le contour et plus précisément une approximation polygonale de celui-ci, sous la forme d'une liste de segments.

Le processus est itératif : un *front*, initialisé par l'ensemble des items du contour donné, est analysé de façon à déterminer une *zone de départ*. Celle-ci permet de créer un ou plusieurs éléments internes. Le front est alors mis à jour et le processus de création des éléments est poursuivi tant que le front n'est pas vide. Brièvement, le processus est le suivant :

- Initialisation du front;
- Analyse du front:
  - Détermination d'une zone de départ;
  - Analyse de cette zone:
    - \* Création de point(s) interne(s) et d'élément(s) interne(s);
    - \* Mise à jour du front.
- Tant que le front n'est pas vide, aller à (Analyse du front).

L'analyse du front et le processus de création des éléments peuvent être effectués de plusieurs manières.

Il convient de remarquer que ce type d'approche, au moins en dimension 2, représente historiquement la première solution automatique permettant le maillage de domaines dont la forme est quelconque.

### 2.2 Eléments d'algorithmes de maillage

Un mailleur frontal construit le recouvrement du domaine  $\Omega$  en triangles en partant de son contour. Il utilise, en pratique, une approximation polygonale du contour sous la forme de la liste de ses segments constitutifs. L'intérieur du domaine, donc la zone à mailler, est déterminé grâce à l'orientation du contour servant de donnée.

Le front initial est construit comme l'ensemble des segments du contour  $C$  décrivant le domaine  $\Omega$ .

Etant donné un front  $F$  associé à un contour  $C$ , nous allons préciser le mode de création des triangles. Au fur et à mesure du processus de création des triangles internes, le contour  $C$  et le front  $F$  vont être mis à jour (voir plus loin).

L'analyse du front  $F$  conduit à choisir une zone de départ à partir de laquelle on va construire un nouvel élément du maillage. Pour former un triangle, l'exploration du voisinage de la zone de départ doit amener soit à la connexion avec un point existant, soit à la création d'un nouveau point interne au domaine actuel. L'élément ainsi formé doit être "idéal" vis-à-vis de la zone de départ et de son voisinage. La position des points internes créés est définie de telle sorte qu'ils

soient "optimaux", c'est-à-dire que les éléments s'appuyant sur ces points soient aussi réguliers que possible.

Il faut veiller à ce que chaque point créé soit interne au domaine actuel (c'est-à-dire le domaine restant à mailler). Ceci implique que tout point créé est d'une part interne au domaine que l'on maille et d'autre part qu'il n'est pas dans un élément déjà construit. Cette vérification, point crucial de ce type de méthode, repose sur la connaissance d'un voisinage adéquat de la zone en cours de traitement (voir plus loin). Dans le cas de la dimension 2, un point sera interne au domaine si l'intersection de toutes les arêtes issues de ce point avec une arête quelconque du front est vide<sup>1</sup>.

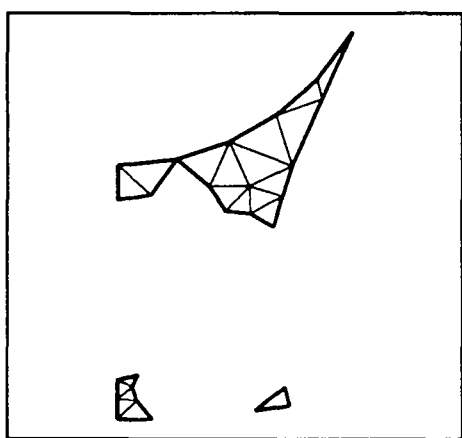


Figure 1: Maillage TRIGEO : état du front

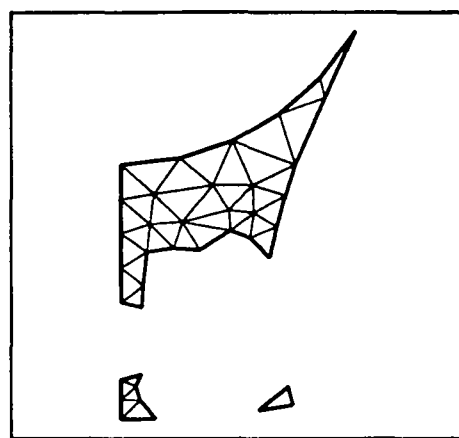


Figure 2: état du front (suite)

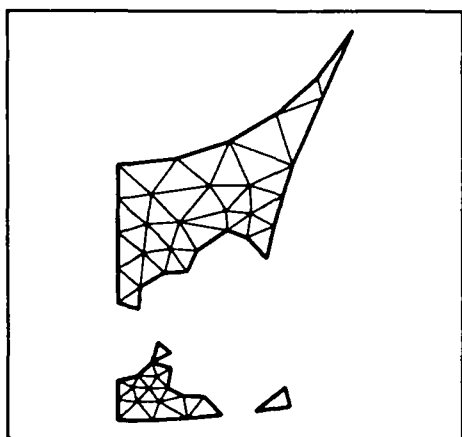


Figure 3: état du front (suite)

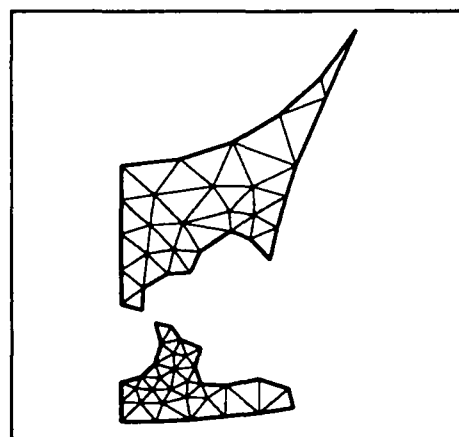


Figure 4: état du front (suite)

Un nouveau front  $F$  est formé en éliminant du front actuel les arêtes appartenant à un triangle créé et en y ajoutant les arêtes du ou des triangles construits, arêtes non communes à deux éléments.

<sup>1</sup>Dans le cas où le domaine possède un ou plusieurs trous, il faut ajouter la condition suivante : aucun triangle formé avec le point en cours de création ne contient un point d'une arête quelconque du bord de chacun des trous présents.

Ce nouvel état du front  $F$  est alors traité par la même méthode. Les figures 1, 2, 3 et 4 montrent quelques états d'un front au cours de son évolution. Il s'agit d'un domaine maillé par le mailleur frontal TRIGEO de la bibliothèque MODULEF. Quand le front  $F$  est vide, le maillage final est obtenu.

La rapidité et l'efficacité de la méthode dépendent de la façon dont est maîtrisé l'espace. Il s'agit de savoir retrouver rapidement le contexte relatif à un segment du front, c'est-à-dire de connaître le voisinage de tout triangle du maillage en cours d'évolution.

**Remarque 2.1 :** Contrairement à d'autres méthodes comme les méthodes algébriques (cf. [George-1990]), le nombre d'éléments du maillage final n'est pas calculable à l'avance. Il est fonction de la géométrie, du nombre de points du contour et de leur répartition.

**Remarque 2.2 :** La triangulation obtenue est liée de manière évidente au nombre et à la position relative des points discrétisant le contour. En spécifiant ces derniers, il est possible d'obtenir une densité variable de mailles dans certaines régions. Certains mailleurs frontaux permettent de spécifier des informations relatives à des propriétés de ce type (densité variable, anisotropie, ...).

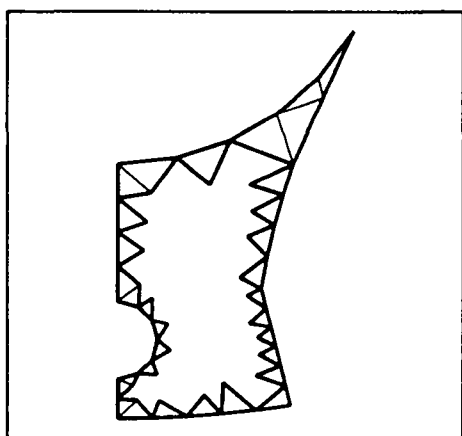


Figure 5: *Fronts par gonflements.*

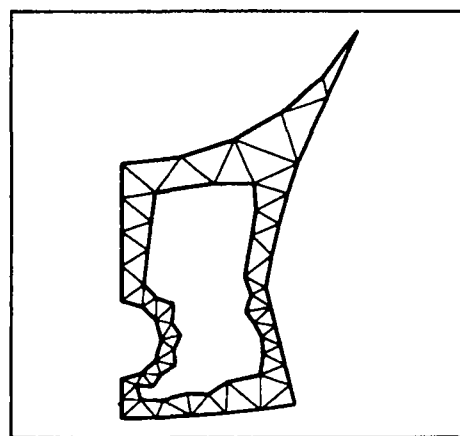


Figure 6: *Fronts par gonflements (suite).*

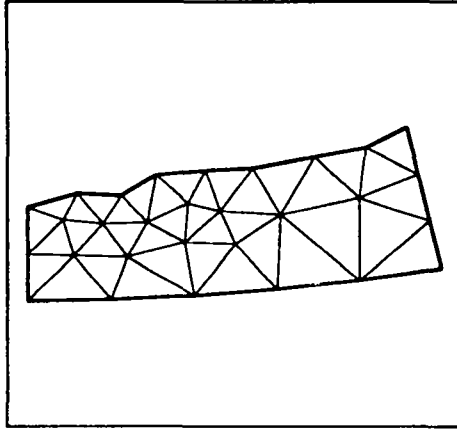
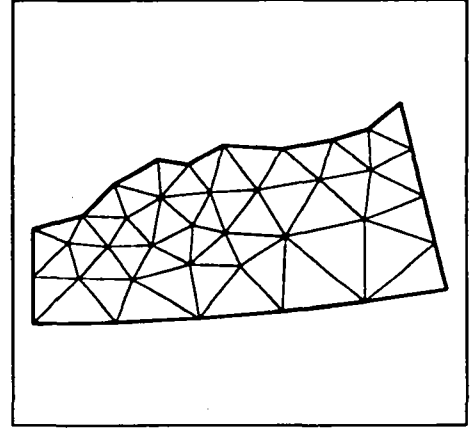
Il existe de nombreuses variantes permettant d'obtenir des algorithmes frontaux sensiblement différents. En particulier la zone de départ peut être choisie comme :

- une portion du contour actuel telle que ses constituants satisfont à certaines conditions (la méthode décrite ci-dessus rentre dans ce cadre);
- l'ensemble du front, c'est-à-dire ses constituants pris dans un ordre défini.

La première approche permet de traiter tout d'abord des zones particulières, par exemple telles que les angles formés par les segments du front sont "petits". La seconde approche produit un phénomène de gonflement du front de départ (figures 5 et 6) ou une propagation à partir d'une ligne de départ (figure 7 et 8).

**Remarque 2.3 :** La présentation précédente se place dans le cas isotrope. Chaque triangle créé est le plus proche possible d'un triangle équilatéral.



Figure 7: *Fronts par propagation linéaire.*Figure 8: *Propagation linéaire (suite).*

**Remarque 2.4 :** La technique frontale peut être également appliquée à la construction de quadrangles. Basé sur le même principe, l'algorithme cherche à créer des quadrangles de forme aussi régulière que possible. Utilisant un raisonnement empirique, le processus n'exclut pas la création de quelques triangles dans les zones impossibles à recouvrir autrement.

**Remarque 2.5 :** Pour créer les points internes, [Lo-1985] propose, en dimension 2, une approche différente. On se donne un réseau régulier de points recouvrant le domaine  $\Omega$  et on connecte entre eux ces points pour former les triangles. A proximité de la frontière, un point est choisi si sa position en fait le point "optimal" vis-à-vis des points présents sur la frontière; pour les points éloignés de cette dernière, la connexion définissant les triangles est immédiate.

### 2.3 Premières conclusions

Le rapide exposé ci-dessus met en évidence les différents problèmes rencontrés lors de l'implémentation d'une méthode frontale. Deux questions se posent notamment :

- Comment connaître le contexte géométrique d'un élément ?
- Quelle taille doit avoir un élément ?

Une solution pour résoudre ces problèmes semble être d'introduire :

- un espace de voisinage pour un accès rapide aux éléments voisins d'un élément donné,
- un espace de contrôle permettant d'orienter la création des points internes et des éléments en résultant.

Ces notions seront développées par la suite.

Remarquons par ailleurs que l'ensemble de ces considérations et la mise en œuvre sur ordinateur des algorithmes associés devront prendre en compte le fait que la transcription sur machine d'une opération de nature géométrique n'est jamais qu'une approximation plus ou moins juste de celle-ci.

### 3 Quelques outils

#### 3.1 Normalisation préalable

Pour éviter les erreurs d'arrondis, les données (i.e. les coordonnées des points fournis) sont normalisées entre 0 et 16777215 puis éventuellement converties en entiers.

Cette valeur représente la résolution ou pouvoir de séparation de la méthode. Elle est choisie de façon à permettre le calcul exact des surfaces (i.e., de longueurs au carré) et est donc fonction du nombre de bits du mot de l'ordinateur employé ( $16777215 = 2^{24} - 1$ ).

#### 3.2 Outils informatiques

Les structures de données utilisées pour stocker les informations relatives au front sont les arbres binaires de recherche (ABR) et les listes (cf. [Aho et al. 1983] et [Basdevant-1991]).

Par souci de clarté et d'efficacité, deux ABR sont utilisés : un pour les points du front et les éventuels points internes, un pour les segments du front. Cette structure d'ABR a été choisie car elle permet la recherche rapide d'une information qui s'effectue en moyenne en  $\log_2 N$  opérations,  $N$  étant la taille de l'ABR (i.e. le nombre de nœuds qu'il contient).

Les nœuds des ABR sont des valeurs entières appelées clés qui correspondent aux numéros des cases d'une grille (cf. Espace de voisinage). A chaque nœud (ou clé) est associé un pointeur sur une liste contenant toutes les informations relatives à la case correspondante (cf. figure 9). Dans l'ABR des points du front par exemple, une liste contient tous les points du front situés dans la case liée à la clé de cette liste; plus précisément, elle contient les numéros de ces points ainsi que leur cardinalité (nombre de segments du front auxquels un point appartient).

Cela permet de retrouver rapidement l'ensemble des informations sur le front dans un voisinage donné.

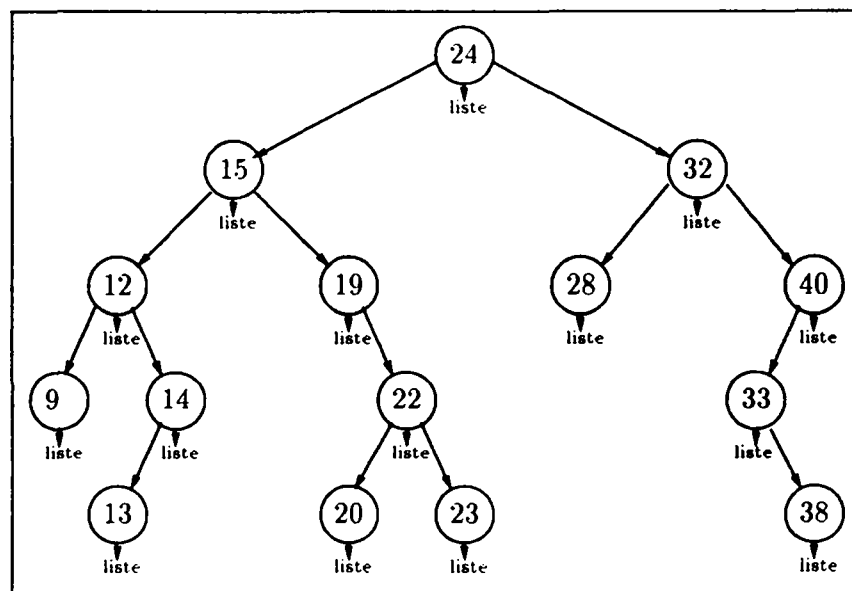


Figure 9: Exemple d'arbre binaire de recherche.

### 3.3 Outils géométriques

Dans une méthode frontale, plusieurs questions se posent en termes géométriques :

- Quelle est la position d'un point par rapport à la partie du domaine restant à mailler ?
- Un triangle donné est-il à l'intérieur ou à l'extérieur du domaine à mailler ?
- Les arêtes d'un triangle intersectent-elles d'autres arêtes du front ?

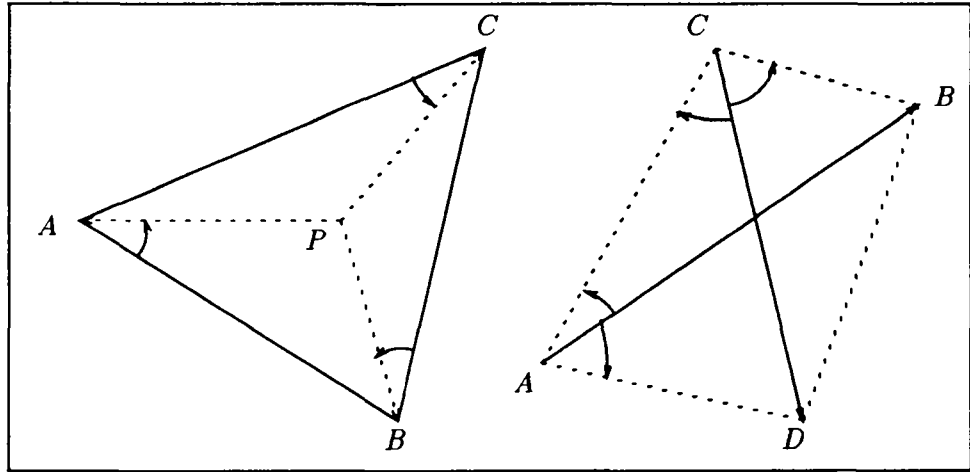


Figure 10: Position d'un point par rapport à un triangle et intersection de deux segments.

Pour répondre de manière efficace à ces questions, il est utile (cf. figure 10) de disposer des résultats suivants :

- Un point  $P$  est à l'intérieur d'un triangle  $ABC$  si, et seulement si, les produits vectoriels  $\vec{AB} \wedge \vec{AP}$ ,  $\vec{BC} \wedge \vec{BP}$ ,  $\vec{CA} \wedge \vec{CP}$  sont de même signe (i.e. les surfaces des 3 sous-triangles  $ABP$ ,  $BCP$ ,  $CAP$  sont de même signe, positif ici).
- Deux segments  $[AB]$  et  $[CD]$ , tels qu'il n'y ait pas 3 points alignés<sup>2</sup>, se coupent si, et seulement si :

$$(\vec{AB} \wedge \vec{AC}).(\vec{AB} \wedge \vec{AD}) < 0 \text{ et } (\vec{CD} \wedge \vec{CA}).(\vec{CD} \wedge \vec{CB}) < 0.$$

Notons que calculer un produit vectoriel revient à calculer une surface, ce qui justifie la normalisation préalable mentionnée plus haut.

<sup>2</sup>C'est le cas si les 4 produits vectoriels mentionnés sont tous non nuls. Sinon, il faut distinguer attentivement les différentes configurations possibles pour les deux segments.

## 4 Espace de contrôle

### 4.1 Rôle

L'un des problèmes posés par l'utilisation d'une méthode frontale est de gérer convenablement les chocs (collisions entre deux parties de front comprenant des segments de taille différente).

Pour ce faire, on introduit un *espace de contrôle* ([George-1990]). Il doit diriger la construction des éléments du maillage en permettant de connaître en chaque point du domaine la taille d'un élément ou la longueur de ses arêtes dans le cas isotrope, ou éventuellement en privilégiant une direction dans le cas d'un maillage anisotrope.

### 4.2 Construction

L'espace de contrôle n'est autre qu'un recouvrement du domaine traité auquel est associé un champ de valeurs (par exemple la taille souhaitée en tout point) facilement accessible.

Dans le cas où les données sont constituées uniquement des segments discrétisant le contour du domaine à mailler, la seule information a priori connue est la taille de ces segments. Il est clair que les éléments créés doivent être fonction de cette information. Loin de la frontière, on ne sait pas dire quelle est la taille souhaitée. Le problème est donc de construire cette information. Plusieurs techniques sont possibles, parmi lesquelles :

- construire une grille sur le domaine et calculer en ses points (ou nœuds) la taille souhaitée, par exemple par interpolation,
- construire un "quadtree" (cf. [Shephard et al. 1988a]) dans le même esprit,
- construire un maillage grossier permettant de faire une interpolation,

L'approche que nous avons retenue consiste à construire sur les points connus un maillage frontalier de Voronoï (cf. [George-1991]) en remarquant que cette étape est peu coûteuse en temps CPU.

Déduit d'un maillage "boîte"<sup>3</sup> (ibidem), le maillage frontalier associé au domaine comprend comme sommets d'éléments les extrémités des segments de la frontière du domaine et les éventuels points internes fournis en entrée du mailleur (cf. figures 11 et 12).

A ce premier maillage, qui sera remplacé par la suite par le véritable maillage du domaine, on superpose une grille régulière dont on habille les nœuds par des poids, notés  $h$ , qui déterminent les tailles des triangles du maillage. Le pas de cette grille doit être assez petit pour tenir compte au maximum de l'information donnée par le maillage frontalier.

On connaît en entrée du mailleur les poids des points de la frontière et des éventuels points internes. Le poids d'un nœud de la grille est alors calculé par interpolation  $P1$  des poids des 3 sommets du triangle contenant le nœud.

On obtient ainsi une grille régulière recouvrant le domaine et contenant des informations consistantes  $P1$  sur les tailles des triangles à générer (cf. figure 13).

Une autre solution aurait pu être de se passer de cette grille en cherchant directement quel triangle du maillage frontalier contient un point donné. Mais cela impose la recherche d'un triangle du maillage frontalier dès que l'on veut calculer un  $h$ . Or cette recherche est coûteuse à la fois en espace mémoire et en temps.

<sup>3</sup> Maillage réalisé uniquement à partir des points connus plus quelques points définissant une enveloppe convexe du domaine ou "boîte englobante".

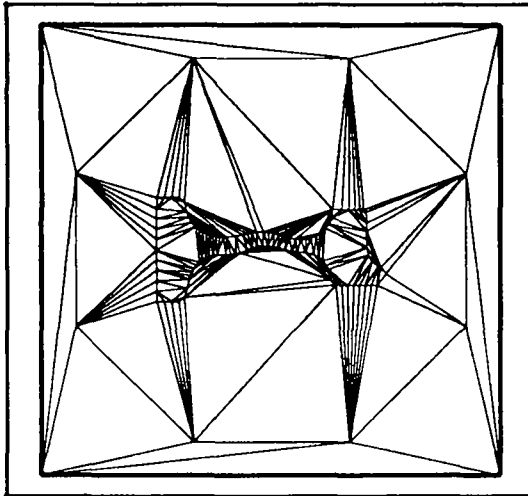


Figure 11: *Maillage boîte.*

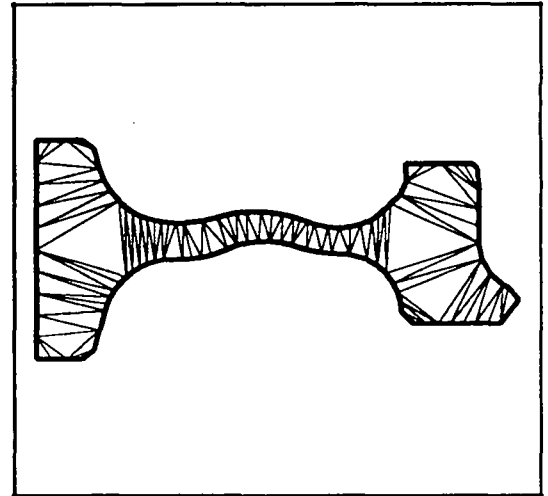


Figure 12: *Maillage frontalier.*

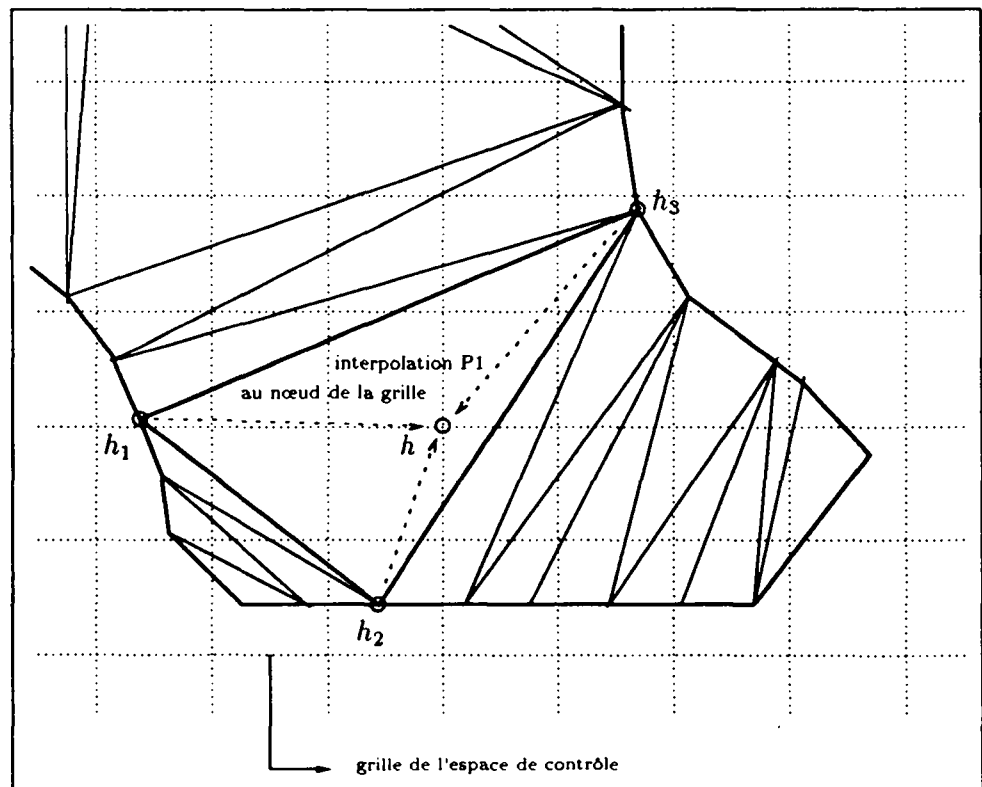


Figure 13: *Construction de l'espace de contrôle.*

### 4.3 Utilisation

On est désormais en mesure de donner en chaque point du domaine le  $h$  correspondant. Il suffit en effet de trouver la case de la grille contenant ce point et de faire une interpolation  $Q1$  des poids des 4 nœuds sommets de cette case (cf. figure 14).

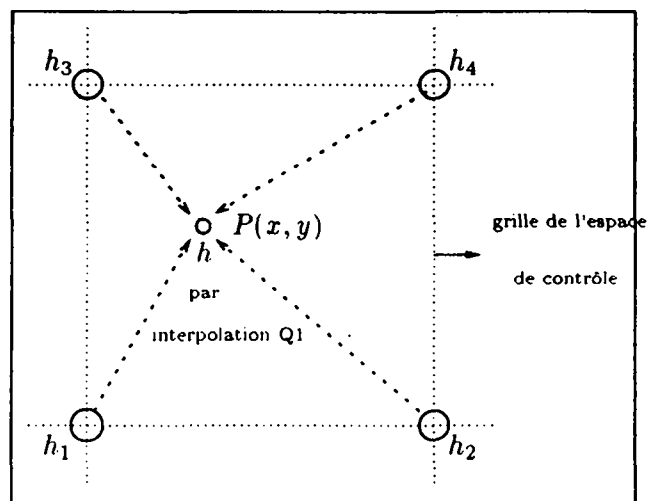


Figure 14: Utilisation de l'espace de contrôle.

### 4.4 Remarque importante

Il semble qu'une grille régulière ne soit pas toujours le support géométrique de l'espace de contrôle le mieux adapté au problème. Pour un domaine dont le contour comporte des segments de tailles très différentes (de 1 à 10.000 par exemple) un quadtree (cf. figure 15) paraît plus indiqué, car il respecte mieux l'information sur les  $h$  donnée par le maillage frontalier. Le problème réside dans la difficulté relative d'implémenter et d'utiliser cette structure par rapport à une grille régulière.

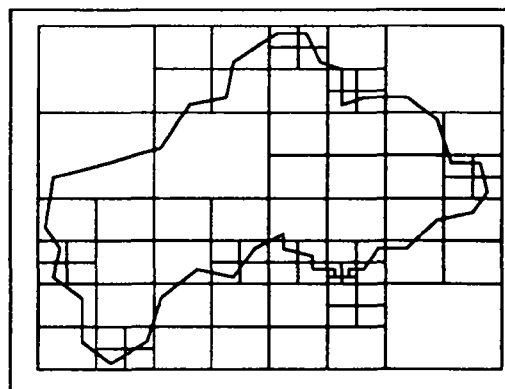


Figure 15: Quadtree relatif aux données d'un contour.

## 5 Espace de voisinage

### 5.1 Rôle

Un autre problème des méthodes frontales est de savoir où l'on est.

Pour répondre à cette question, on introduit la notion d'*espace de voisinage* ([George-1990]). Il doit permettre de connaître le contexte géométrique de chaque élément. Pour chaque point (resp. segment) du front, la recherche des points (resp. segments) du front voisins s'effectue ainsi dans une zone limitée du domaine et non pas dans le domaine tout entier.

### 5.2 Construction

L'espace de voisinage utilisé ici est une grille régulière recouvrant le domaine. Une case de la grille est une entité géométrique pour toutes les recherches de voisinage (cf. figure 16).

La grille utilisée est virtuelle au sens où ses cases ne sont pas des éléments géométriques générés par le programme. Elle est simplement la représentation des différentes valeurs entières prises par une clé définie par :

$$CLE(X, Y) = I + J \times NX$$

où :

$$I = INT((X - X0)/DM)$$

$$J = INT((Y - Y0)/DM)$$

$(X, Y)$  : point considéré

$NX$  : nombre de cases de la grille en abscisse

$(X0, Y0)$  : coin inférieur gauche de la grille

$DM$  : pas de la grille

Cette clé constitue le lien entre le domaine à mailler et les ABR où sont stockées les données. A une case de la grille correspond une clé (un nœud) de l'ABR ayant pour valeur le numéro de la case donné par les expressions ci-dessus (cf. figures 16 et 17).

Précisons qu'un segment est repéré par la valeur de la clé en son milieu.

Le seul problème est en fait de déterminer la meilleure valeur du pas de la grille. Il s'agit de trouver le bon compromis entre le nombre de clés dans les ABR et les tailles des listes pour chaque clé. Si le pas est trop grand, le nombre de clés est petit, mais les listes, parcourues séquentiellement, ont des tailles importantes. Inversement, si le pas est petit, le nombre de clés est élevé, et la recherche sur clé ainsi que la gestion des ABR sont plus coûteuses.

Notons qu'une clé n'existera effectivement dans l'ABR des points (resp. des segments) que si la case correspondante de la grille contient au moins un point (resp. un segment) du front.

### 5.3 Utilisation

La recherche des points (resp. segments) du front présents au voisinage d'un point (resp. segment) du front se traduit donc par une exploration partielle de l'ABR correspondant : on n'explore que les clés de l'ABR liées aux cases de la grille de l'espace de voisinage proches de celles du point (resp. segment) considéré (cf. figure 16).

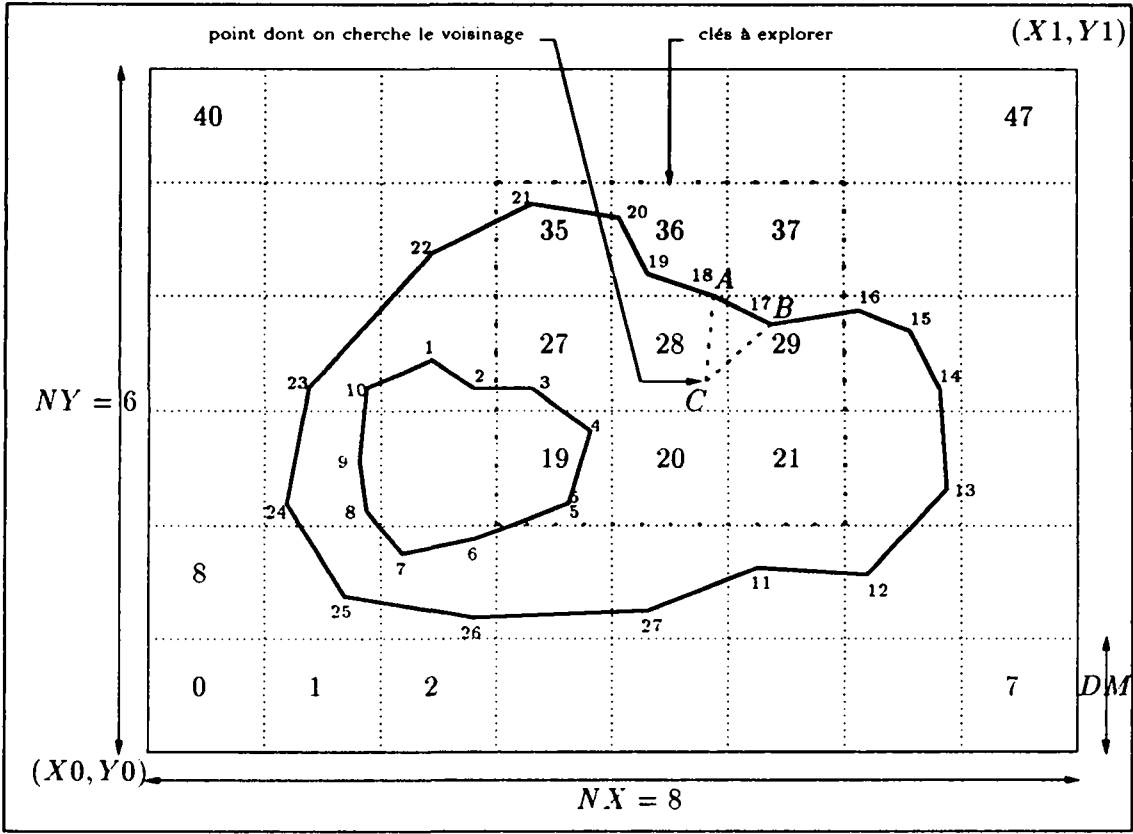


Figure 16: Utilisation de l'espace de voisinage.

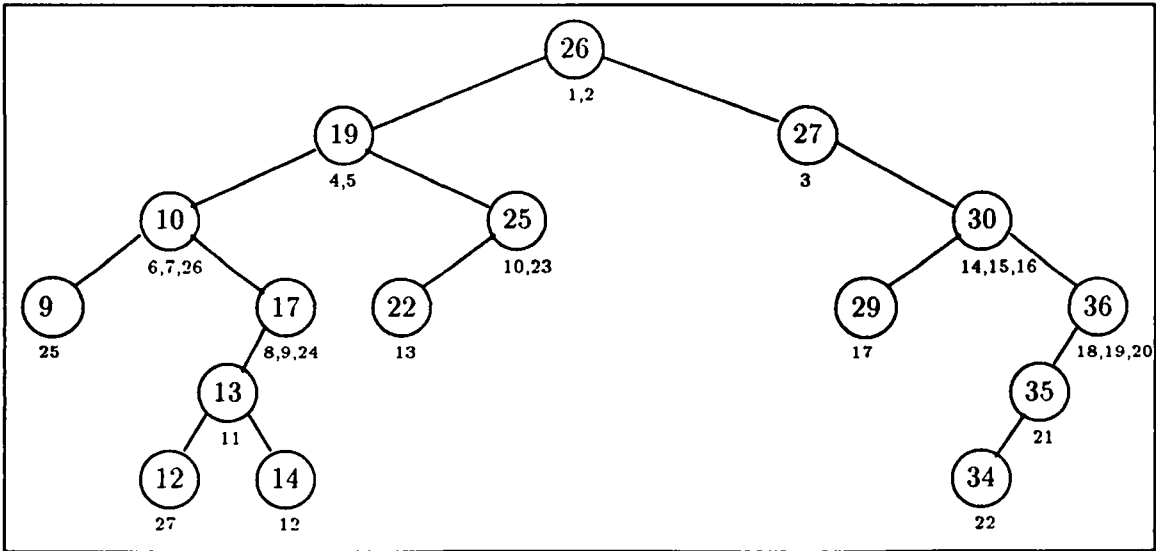


Figure 17: Exemple d'ABR des points correspondant.



## 6 Création d'un élément du maillage

Tant que le front n'est pas vide (i.e. tant que l'ABR des segments du front contient des segments), on crée un élément (ici un triangle) à partir d'un segment du front en suivant le processus décrit ci-dessous :

### 6.1 Choix d'un segment du front

C'est une étape déterminante de l'algorithme, tant pour sa vitesse globale que pour l'aspect et la qualité du maillage généré.

Il faut distinguer ici deux problèmes : le critère de choix du segment et la manière de trouver ce segment dans l'ABR des segments du front. Le premier aura surtout une influence sur la qualité du maillage; le second sur sa vitesse.

Plusieurs critères de choix du segment peuvent être envisagés. [Peraire et al. 1988] propose par exemple de choisir le segment le plus petit du front. L'avantage de commencer par construire les petits triangles est de s'assurer de leur qualité, car celle-ci est plus sensible que sur des gros triangles pour un même déplacement d'un des sommets.

L'idée retenue cependant est de choisir le segment dont les extrémités ont les numéros les plus petits de telle sorte que le maillage s'effectue par couches successives. Premier avantage : le nombre de segments du front ne grandit pas trop (il diminue même à chaque couche si le domaine à mailler ne comporte aucun trou). Deuxième avantage : le maillage étant relativement structuré, les chocs (rencontres entre deux parties du front) sont mieux gérés et la qualité du maillage final s'en ressent.

La méthode pour trouver un segment du front répondant au critère choisi est de parcourir l'ABR des segments du front, en totalité ou en partie seulement, suivant la taille du maillage; car explorer la totalité de l'ABR est assez coûteux en temps si le maillage a une taille importante.

### 6.2 Construction d'un sommet idéal

Chaque fois que l'on veut créer un triangle à partir d'un segment  $[AB]$  du front, on commence par calculer la position d'un sommet  $C$  "idéal" au sens où le triangle  $ABC$  est le meilleur que l'on puisse former compte tenu des informations dont on dispose : taille  $h$  des triangles à cet endroit, ou direction privilégiée du triangle dans le cas anisotrope.

Pour un maillage isotrope, on place tout d'abord  $C$  tel que  $ABC$  soit équilatéral. On calcule alors la taille  $h$  en  $C$  en utilisant la grille de l'espace de contrôle décrit précédemment. Puis on ajuste la position de  $C$  sur la médiatrice de  $[AB]$  en fonction de  $h$  (cf. figure 18).

### 6.3 Recherche des points candidats

Après avoir déterminé le sommet idéal  $C$ , on recherche dans un voisinage adéquat (en pratique un disque de centre  $C$ ) tout point  $P$  du front (ou point interne) susceptible d'être le troisième sommet du triangle (cf. figure 19).

La recherche s'effectue via l'espace de voisinage décrit plus haut. Les clés à explorer dans l'ABR des points sont les numéros des cases de la grille de l'espace de voisinage situées à proximité de la case contenant  $C$ . Pour chaque clé explorée, on parcourt la liste de points associée et l'on ne mémorise dans un tableau de candidats que les points situés à l'intérieur du disque.

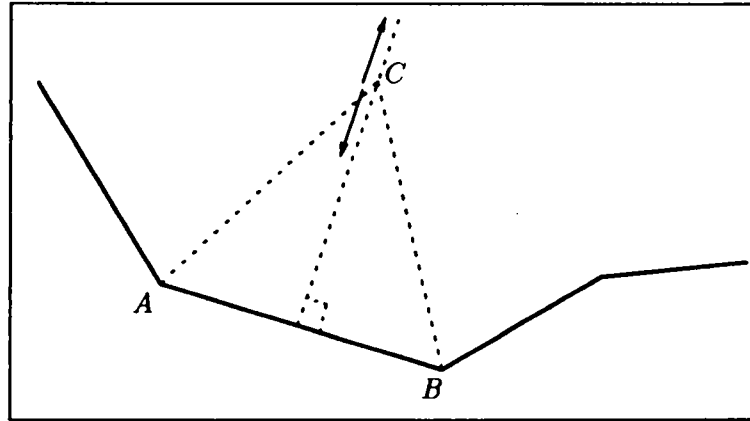


Figure 18: Construction du sommet idéal  $C$  à partir d'un segment  $[AB]$ .

Le problème est de trouver le rayon  $r$  du disque qui doit être bon quel que soit le maillage. En pratique, si  $h = AC = BC$ , on aura :  $h/2 < r < h$ .

Le tableau des candidats obtenu est alors trié dans l'ordre des distances croissantes des points au point  $C$ .  $C$  lui-même est ajouté en fin de tableau. On privilégie en effet les points du front existants par rapport à la création d'un nouveau point.

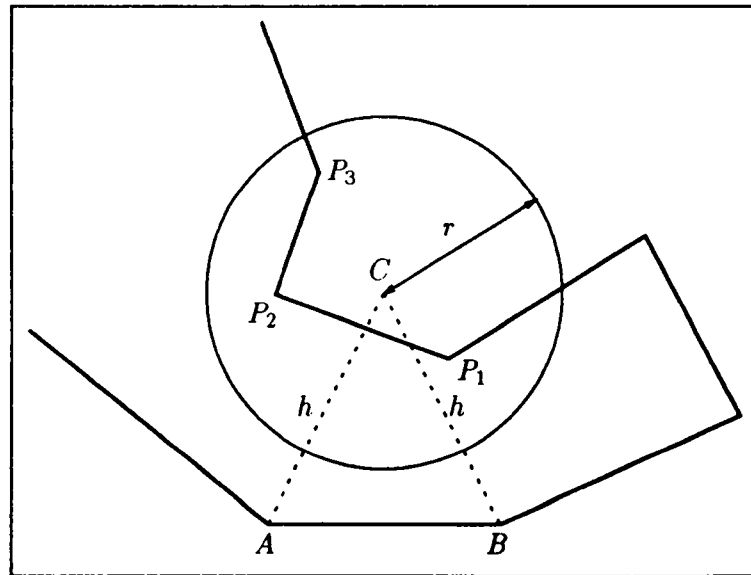


Figure 19: Recherche autour de  $C$  des points candidats du front.

#### 6.4 Admissibilité d'un candidat

Sera retenu dans le tableau des candidats à la formation d'un triangle à partir d'un segment  $[AB]$  le premier point  $P$  vérifiant les conditions suivantes :

- a) Le triangle  $ABP$  est orienté positivement.
- b) Le triangle  $ABP$  ne contient aucun point du front.
- c) Les segments  $[AP]$  et  $[BP]$  ne coupent aucun segment du front.
- d) Les angles formés par les segments  $[AP]$  et  $[BP]$  avec les segments du front sont assez grands.

Les conditions a), b), c) font appel aux outils géométriques décrits au début de ce rapport. b), c), d) utilisent la grille de l'espace de voisinage afin de ne parcourir qu'une partie de l'ABR des points (ou des segments) du front.

Si aucun point du tableau n'est admis, on revient à l'étape de recherche des candidats du front avec un rayon de recherche  $r$  plus grand (cf. figure 20). L'angle minimal toléré pour la condition d) ci-dessus est alors diminué.

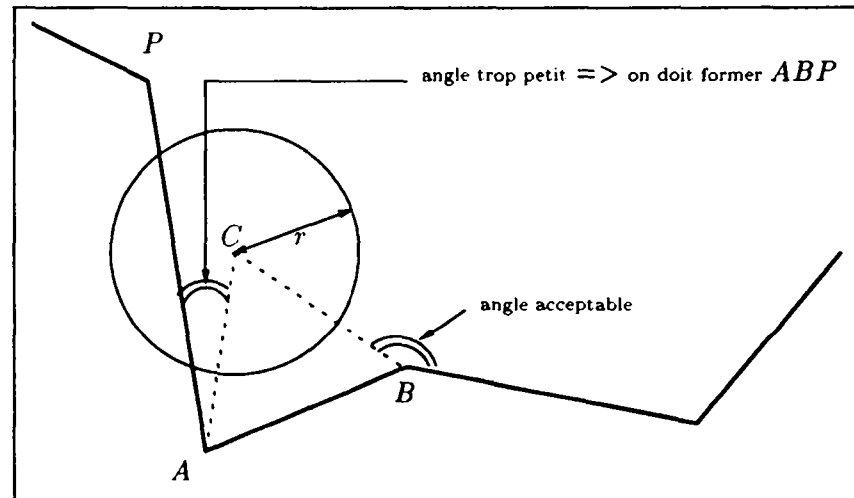


Figure 20: Rejet du point  $C$  : on augmente le rayon  $r$  de recherche.

## 7 Schéma général du mailleur frontal implémenté

On regroupe ici les résultats précédents pour proposer le schéma suivant :

- Création du maillage frontalier associé aux données.
- Création d'un espace de contrôle (grille régulière ou quadtree).
- Création d'un espace de voisinage (id.).
- Initialisation du maillage et du front.
- Tant que le front n'est pas vide :
  - Choix d'un segment  $[AB]$  du front.
  - Construction d'un sommet idéal  $C$  à partir du segment  $[AB]$ .
  - Calcul du rayon de recherche et de l'angle minimal initiaux.
  - Répéter :
    - \* Recherche des points candidats autour de  $C$ .
    - \* Tri des candidats dans l'ordre des distances croissantes à  $C$  ( $C$  est rangé en dernier).
    - \* Détermination parmi les candidats du premier point  $P$  vérifiant :
      - le triangle  $ABP$  est orienté positivement;
      - le triangle  $ABP$  ne contient aucun point du front;
      - les segments  $[AP]$  et  $[BP]$  ne coupent aucun segment du front;
      - les angles formés par les segments  $[AP]$  et  $[BP]$  avec les segments du front sont assez grands.
    - \* Si aucun point ne convient : augmenter le rayon de recherche et diminuer l'angle minimal.
  - Jusqu'à l'obtention d'un point convenable.
  - Mise-à-jour du maillage.
  - Mise-à-jour du front.
- Fin tant que.
- Régularisation éventuelle.

## 8 Exemples et comparaison avec une méthode de Voronoï

### 8.1 Exemples de maillages

Sont donnés maintenant quelques exemples de maillages obtenus en employant cette méthode. Pour chaque exemple, on donnera le nombre de triangles, le nombre de points, le temps CPU (sur APOLLO DN 4000), la qualité du résultat c'est-à-dire la répartition des triangles en fonction de leur forme mesurée via la quantité  $Q = \alpha \frac{h}{\rho}$  où  $\alpha$  est un coefficient de normalisation tel que  $Q = 1$  pour un triangle équilatéral,  $h$  est le diamètre de l'élément mesuré,  $\rho$  est le rayon de son cercle inscrit. Notons que  $Q$  augmente quand le triangle s'aplatit.

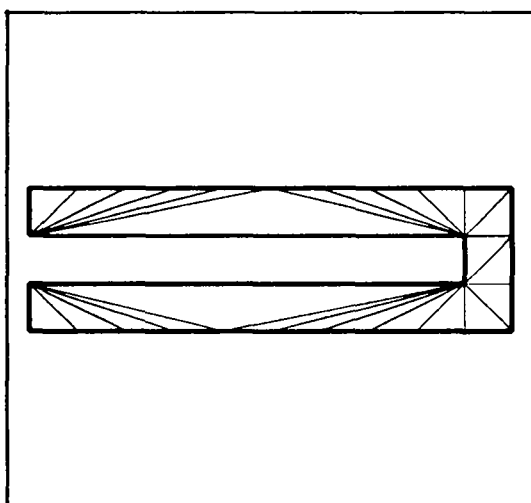


Figure 21: *Contour mal discrétisé.*

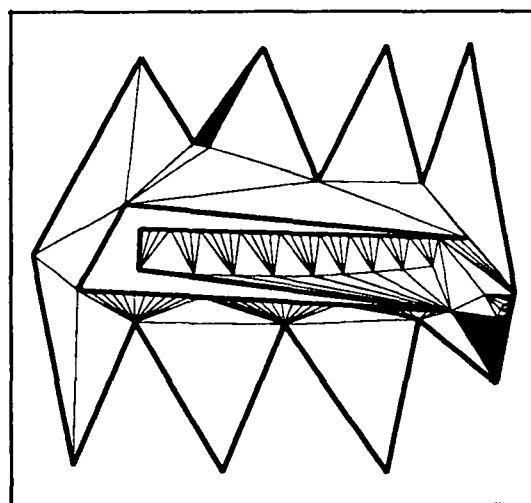


Figure 22: *Autre exemple de test.*

La figure 21 (cas 1 du tableau 1) montre un exemple avec un contour "mal" discrétisé.

Cet exemple, tout comme celui de la figure 22 (cas 2 du tableau 1), illustre la robustesse de la méthode.

La figure 23 (cas 3 du tableau 1) montre l'exemple "habituel" utilisé dans Modulef qui est celui d'une coupe d'une roue. La figure 24 (cas 4) illustre le cas d'un carré et, contrairement à ce que l'on pourrait croire a priori, nous paraît plus significative du comportement de la méthode au sens où une géométrie simple n'est pas en général correctement maillée par un mailleur automatique.

La figure 25 (cas 5 du tableau 1) montre l'exemple classique d'un profil et la figure 26 (cas 6) le cas d'un carré défini par son contour, discrétisé à l'aide de progressions variables, et quelques points internes spécifiés (avec des  $h$  petits).

On pourra comparer les maillages obtenus ici avec ceux donnés par une méthode de Voronoï en se reportant à [George-1991].

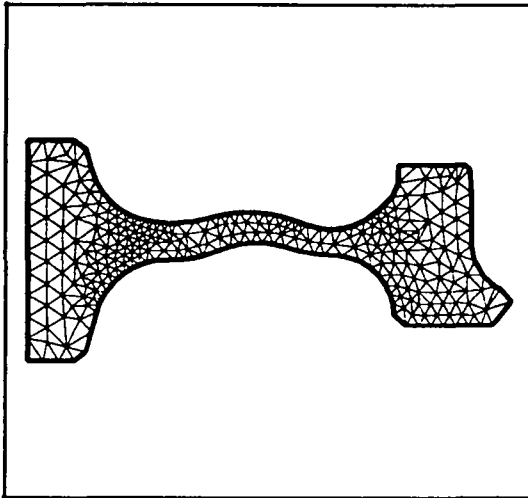


Figure 23: *Coupe d'une roue.*

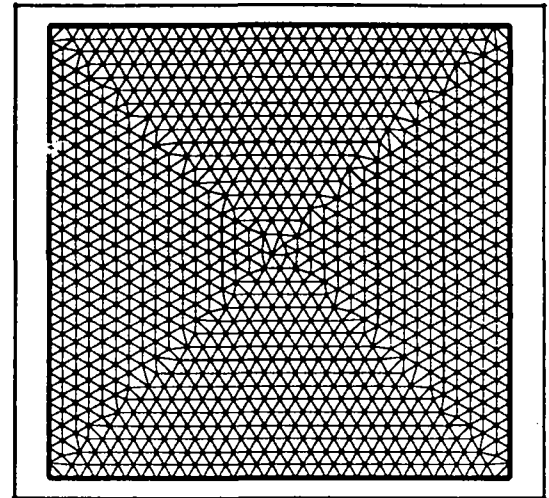


Figure 24: *Cas d'un carré.*

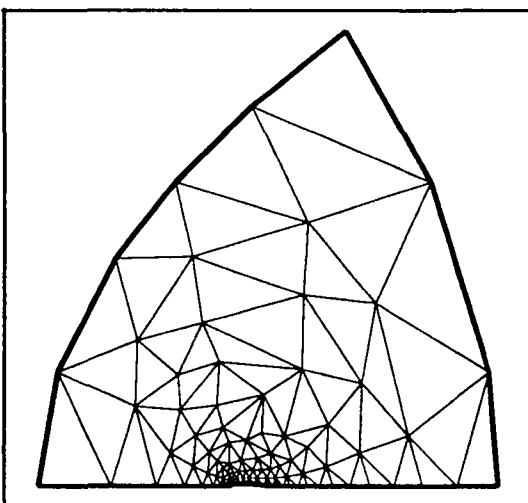


Figure 25: *Exemple de profil.*

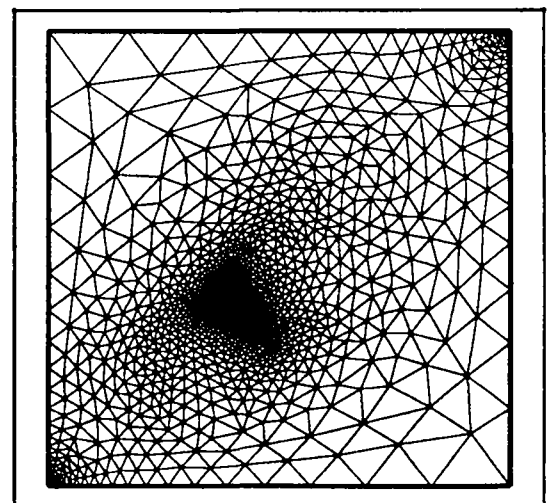


Figure 26: *Cas de points internes spécifiés.*

## 8.2 Comparaison avec une méthode de Voronoï

Cas de test	1	2	3	4	5	6
Nombre de triangles	26	270	514	2052	163	3106
Nombre de sommets	28	257	314	1087	108	1594
Temps CPU (en s.)	6.8	561	12.9	20.4	6.4	51.5
Qualité	15.04	332.4	3.41	2.01	12.8	2.60
Nombre de triangles "mauvais"	16	245	5	1	21	6
Qualité après régularisation	-	-	1.76	1.39	3.73	1.73
Nombre de triangles "mauvais"	-	-	0	0	13	0

Tableau 1a : Résultats relatifs aux maillages ci-dessus; méthode frontale.

Cas de test	1	2	3	4	5	6
Nombre de triangles	26	244	536	2976	199	2290
Nombre de sommets	28	244	325	1549	126	1186
Temps CPU (en s.)	6.2	12.3	27.4	26.7	15.	100.
Qualité	15.04	89.33	3.37	1.84	2.49	2.73
Nombre de triangles "mauvais"	16	231	2	0	15	13
Qualité après régularisation	-	-	1.68	-	2.11	1.84
Nombre de triangles "mauvais"	-	-	0	-	5	0

Tableau 1b : Résultats relatifs aux maillages ci-dessus; méthode de Voronoï.

Les tableaux 1a et 1b donnent en termes de temps CPU (sur DN 4000) et de qualité les résultats obtenus pour les maillages illustrés ci-dessus. Ils donnent comme qualité de maillage la plus mauvaise valeur atteinte et indiquent combien de triangles sont de mesure plus mauvaise que 2.

Cas de test	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de triangles	2052	5726	14696	22990	50202	89150	138832
Nombre de sommets	1087	2964	7509	11696	25402	44976	69917
Temps CPU (en sec.)	1.5	4.4	13.4	23.6	27.3	73.0	127.6

Tableau 2a : Temps requis en fonction de la taille du maillage; méthode frontale.

Cas de test	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de triangles	3028	8324	21862	33860	75484	134368	209952
Nombre de sommets	1575	4263	11092	17131	38043	67585	105477
Temps CPU (en sec.)	1.6	3.6	10.2	16.6	40.8	85.4	143.5

Tableau 2b : Temps requis en fonction de la taille du maillage; méthode de Voronoï.

Les tableaux 2a et 2b donnent le temps nécessaire (sur HP 700) en fonction du nombre de triangles créés. L'exemple pris est le carré déjà utilisé pour lequel on fait varier le nombre de points sur chaque côté : 30, 50, 80, 100, 150, 200, 250 (notons que la qualité après régularisation est toujours de l'ordre de 2).

Notons que le mailleur de Voronoï utilisé crée plus de triangles que le mailleur frontal pour un même nombre de points sur le contour.

Sur la figure 27 apparaissent les graphes déduits de ces tableaux.

La discontinuité du graphe du mailleur frontal correspond au changement d'algorithme du choix des segments de départ (cf. 6.1).

Le mailleur de Voronoï est légèrement plus rapide, mais toutes les routines du mailleur frontal n'ont pas été optimisées.

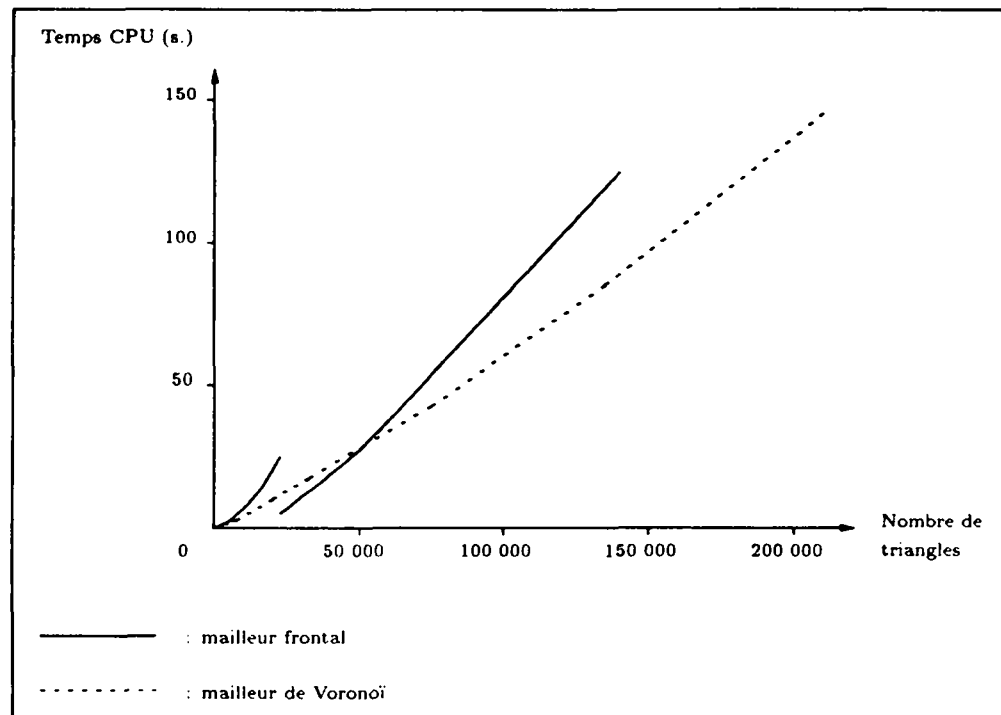


Figure 27: Temps requis en fonction de la taille du maillage.

Calculer la vitesse théorique de ce mailleur frontal relève d'un exercice de style. Il nous paraît plus significatif de regarder les résultats obtenus (cf. tableaux 2a et 2b) qui donnent une idée des performances atteintes effectivement.

On peut cependant dire, compte tenu des complexités propres des routines utilisées, que la complexité globale du programme (au moins pour les gros maillages) est de l'ordre de  $N \log_2 N$ .

### 8.3 Conclusion

En conclusion, le mailleur décrit semble numériquement fiable, rapide et donne des maillages de bonne qualité.

Il reste à étendre les résultats au maillage par des quadrangles, au cas anisotrope, aux maillages adaptatifs et à la dimension 3 (cf. ci-après pour les principales idées relatives à ce cas <sup>4</sup>)

<sup>4</sup>En fait, la présente étude, vise, en particulier, à comprendre *numériquement* la méthode avant de l'appliquer à la dimension 3.



## 9 Extensions possibles

Nous allons tenter dans cette courte section de recenser les extensions possibles de la méthode frontale présentée.

### 9.1 Maillage par des quadrangles

La méthode décrite reste valable, à la différence près que l'on doit placer non plus un mais deux sommets "idéaux" à partir d'un segment du front. Il faut alors pour chacun de ces deux sommets "idéaux" chercher les points du front susceptibles d'être de véritables sommets pour former un quadrangle. On doit alors imposer une condition supplémentaire pour la validité de l'élément : le quadrilatère ainsi formé doit être convexe.

### 9.2 Maillages anisotropes

La différence intervient au niveau du placement du sommet "idéal", donc au niveau de l'espace de contrôle utilisé. Celui-ci devra prendre en compte les valeurs des  $h$  dans deux directions indépendantes.

### 9.3 Maillages adaptatifs

Si l'on connaît déjà une solution au problème considéré, le maillage associé peut servir à construire l'espace de contrôle pour une nouvelle itération.

### 9.4 Maillages 3D

Reprenons la méthode dans ses grandes lignes pour voir comment elle peut s'appliquer à la dimension 3 :

- **Outils** : La notion de triangle est remplacée par celle de tétraèdre défini par la liste orientée de ses 4 sommets, possédant 4 voisins par face (la notion de face remplace la notion d'arête).
- **Normalisation** : Le souci est de tenir exacts en machine non plus des surfaces mais des volumes (i.e. des longueurs au cube).
- **Espaces de contrôle et de voisinage** : On peut utiliser des grilles régulières 3D ou des octrees (cf. [Shephard et al. 1988] et [Shephard et al. 1988a]).
- **Création d'un élément** :
  - Zone de départ : On choisit non plus un segment mais une face du front (de plus petite surface ou dont les numéros des sommets sont globalement les plus petits).
  - Construction d'un sommet idéal : Dans le cas isotrope avec un  $h$  constant, c'est le point tel que le tétraèdre formé soit le plus "proche" d'un tétraèdre régulier.
  - Recherche des candidats du front : Elle s'effectue dans une boule autour du sommet idéal.
  - Admissibilité d'un candidat : Pour convenir, un point devra notamment vérifier les conditions suivantes :

- \* le volume du tétraèdre formé est positif;
  - \* le tétraèdre ne contient aucun point du front actuel;
  - \* les faces du tétraèdre ne coupent aucune face du front actuel;
  - \* les angles formés avec les arêtes ou les faces du front actuel sont acceptables.
- Connexion avec les éléments existants : Elle se fait par un point existant, par une ou plusieurs arêtes, ou par une ou plusieurs faces du front.

## A Annexe technique

Le mailleur décrit dans ce rapport est en cours d'incorporation dans la version 93 du code Modulef [Bernadou et al. 1988] pour remplacer le mailleur TRIGEO existant à ce jour.

Le module d'entrée est la subroutine TRIFRO dont voici les premières lignes :

```

      SUBROUTINE TRIFRO(M1,M2,XM1,XM2,COOR,IACOR,NREFPC,NREFS,NREFA,
+               NPMAX,NBRNOE,NCOMP,NTACO,IOPTIN,NPROPA,
+               NUHPIN,NBRINT,POIDS,NDSDE,NFNOPO,NINOPO)

C *****
C BUT : GENERE UN MAILLAGE 2D PAR UNE METHODE FRONTALE
C *****
C IN :
C --
C M1,XM1,M2,XM2 : LE(S) SUPER(S) TABLEAU(X) (EN GENERAL : M1=M2)
C COOR   : COORDONNEES DES POINTS FOURNIS
C IACOR  : ADRESSE DE COOR DANS M1
C NREFPC : REFERENCE DES POINTS CARACTERISTIQUES
C NREFS  : REFERENCE DES POINTS DU CONTOUR
C NREFA  : REFERENCE DES ARETES FRONTALIERES
C NPMAX  : MAJORANT DU NOMBRE DE SOMMETS A GENERER
C NBRNOE : NOMBRE DE NOEUDS DU CONTOUR DE LA PARTIE A MAILLER
C NCOMP  : NOMBRE DE COMPOSANTES CONNEXES DE LA FRONTIERE
C NTACO  : NOMBRE DE NOEUDS DE CHACUNE DES COMPOSANTES
C IOPTIN : OPTION DE CREATION OU DE FOURNITURE DES POINTS INTERNES
C NPROPA : COEFFICIENT DE PROPAGATION ET TYPE DE CELLE-CI
C NBRINT : NOMBRE DE POINTS INTERNES FOURNIS
C POIDS  : POIDS DES POINTS INTERNES FOURNIS
C NDSDE  : NUMERO DU SOUS-DOMAIN
C NF(NI)NOPO : FICHIER ET NIVEAU DE LA S.D.S. NOPO
C *****
C PROGRAMMEUR : E. SEVENO - PARIS 6 - INRIA 1992
C *****

```

Pour appeler ce mailleur, on utilise le processeur APNOXX [George-1989] qui permet de construire un fichier contenant les données nécessaires au maillage. Celles-ci sont constituées des points et des lignes du contour du domaine à mailler puis des paramètres utiles à l'appel du module TRIFRO, cet appel étant déclenché par la présence du mot-clé TRIA. Le résultat obtenu est une structure de données de type NOPO; c'est la structure de maillage du code Modulef.

En pratique, on a écrit une trentaine de routines (totalisant environ 2500 lignes de code) dont voici la liste :

```

bonang.f  empile.f  inscle.f  poiadm.f  segiso.f  supseg.f  triiso.f
chxseg.f  espon.f  inspnt.f  rajcan.f  sinang.f  taille.f
cle.f     espvoi.f  insseg.f  rchcan.f  somide.f  trican.f
cosang.f  iniabr.f  majfro.f  rchcle.f  supcle.f  trifr2.f
depile.f  initri.f  majtri.f  rchseg.f  suppnt.f  trifro.f

```

## B Bibliographie

- [Aho et al. 1983] A. AHO, J. HOPCROFT, J. ULLMAN, Data structures and algorithms, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1983.
- [Basdevant-1991] C. BASDEVANT, Cours de D.E.S.S. de Mathématiques Appliquées, Paris 6, 1991.
- [Bernadou et al. 1988] M. BERNADOU ET AL., Modulef : une bibliothèque modulaire d'éléments finis, INRIA, 1988.
- [Carnet-1978] J. CARNET, Une méthode heuristique de maillage dans le plan pour la mise en oeuvre des éléments finis, Thèse, Paris, 1978.
- [A. George-1971] J.A. GEORGE, Computer implementation of the finite element method, Stan-CS, Ph. D., 1971.
- [George-1989] P.L. GEORGE, Modulef : Construction et modification de maillages, Rapport Technique n° 104, INRIA, 1989.
- [George-1990] P.L. GEORGE, Génération automatique de maillages. Applications aux méthodes d'éléments finis, collection RMA n° 16, Masson, Paris, 1990.
- [George-1991] P.L. GEORGE, Génération de maillages par une méthode de type Voronoï, Rapport de Recherche n° 1398, INRIA, mars 1991.
- [Golgolab-1989] A. GOLGOLAB, Mailleur 3D automatique pour des géométries complexes, Rapport de Recherche n° 1004, INRIA, mars 1989.
- [Lo-1985] S.H. LO, A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains, Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 21, pp 1403-1426, 1985.
- [Löhner, Parikh-1988b] R. LÖHNER, P. PARIKH, Generation of Three-Dimensional Unstructured Grids by the Advancing-Front Method, AIAA 88 0515, 26<sup>th</sup> Aerospace Sciences meeting, Reno, NV, janvier 1988.
- [Peraire et al. 1988] J. PERAIRE, J. PEIRO, L. FORMAGGIA, K. MORGAN, O.C. ZIENKIEWICZ, Finite element Euler computations in three dimensions, Int. J. Num. Meth. in Eng. vol. 26, pp 2135-2159, janvier 1988.
- [Samet-1984] H. SAMET, The quadtree and related hierarchical data structures, Computing Surveys, vol 16, n° 2, pp 187-285, 1984
- [Shephard et al. 1988] M.S. SHEPHARD, F. GUERINONI, J.E. FLAHERTY, R.A. LUDWIG, P.L. BAEHMANN, Finite octree mesh generation for automated adaptive 3D flow analysis, Numerical grid generation in computational fluid mechanics '88, Miami, 1988.
- [Shephard et al. 1988a] M.S. SHEPHARD, F. GUERINONI, J.E. FLAHERTY, R.A. LUDWIG, P.L. BAEHMANN, Adaptive solutions of the Euler equations using finite quadtree and octree grids, Computers and Structures, vol. 30, pp 327-336, 1988.
- [Vallet-1991] M.G. VALLET, Génération de maillages anisotropes adaptés. Application à la capture de couches limites, Rapport de Recherche INRIA, 1991.

**ISSN 0249 - 6399**